

3 Predikaatarvutus

3.1 Formaliseerimine predikaatarvutuse keeles

Predikaat väljendab objekti omadust või mingit seost (relatsiooni) objektide vahel.

Näited:

“ x on Juku isa”

“Juku armastab Mari”

“Mari on kena”

Selgitus:

- “Juku”, “Mari”, – predikaadi argumendid (objektid), tähistatakse *indiviidkonstandiga*
- “_ on _ isa” ja “_ armastab _” – kahekohalised *predikaadid* (*dyadic predicates*)
- “_ on kena” – ühekohaline predikaat (*monadic predicate*)
kus x – *indiviidmuutuja*

Mõisteid: - aarsus (*arity*) – predikaadi argumentide arv ($0 - n$)

- $A(x, y)$ või $A x y$ – prefiks kuju,
- $x A y$ – infiks kuju,
- $(x,y)A$ või $x y A$ -postfiks kuju

!!! Esimest järku predikaatarvutuses:

- predikaatkonstandid -- puuduvad predikaatmuutujad st. kui predikaat on defineeritud, siis arutluse käigus tema tähendus ei muutu,
- üks predikaat ei tohi olla teise predikaadi argumentiks,

• Liitlausete formaliseerimine:

- *Atomaarne lause* e. *aatom* – sisaldab vaid ühte predikaati

Näide 1:

Peeter on Juku isa: $isa(\text{Peeter}, \text{Juku})$ ehk $I(P, J)$

Näide 2:

Peeter on kellegi isa: $isa(\text{Peeter}, x)$

- *Liitlause* – moodustatakse aatomitest lausearvutuse tehete abil

Näide:

Peeter on Juku isa ja Jaani poeg: $isa(\text{Peeter}, \text{Juku}) \wedge isa(\text{Jaan}, \text{Peeter})$

- **Kvantorid**

Üldistuse ja abstraktsiooni väljendamiseks

Predikaatarvutuse arutus kehtib mingi valdkonna objektide kohta

Valdkonna objektide hulka kokku nimetatakse *universumiks*.

- **Üldisuskvantor** (*universal quantifier*) - universumi kõikide objektide kohta käiva väite esitamiseks.

$\forall x A(j, x)$ - “iga objekt x on objektiga j seoses A ”. Näiteks. “Juku armastab kõiki”

- **Eksistentsikvantor** (*existential quantifier*) - mingit tingimust rahuldava objekti olemasolu väljendamiseks:

$\exists x A(j, x)$ - “Leidub vähemalt üks objekt x , millega objekt j on seoses A .”

N. “Juku armastab kedagi”

$\exists!x A(j, x)$ - “Leidub täpselt üks objekt x , millega objekt j on seoses A ”

Muutuja on *valemis seotud*, kui ta esineb koos kvantoriga ja avaldises kvantori mõjupiirkonnas ja vastasel juhul on muutuja *valemis vaba*.

Muutuja väärtustamisel saadavat lauset nim. *väärtustatuks* ja väärtustamata lause *eksemplariks*.

3.2 Predikaatloogika süntaks ja semantika

- **Tähestik**

- Predikaatsümbolid: A, B, C, \dots (suurtähed)
- Indiviidmuutujad: x, y, z, \dots (tähestiku viimased tähed)
- Indiviidkonstantide sümbolid: a, b, c, \dots, v
- Loogika tehete sümbolid: $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \equiv$
- Kirjavahemärgid: $()$

Indiviidterminid on indiviidkonstantide sümbolid ja indiviidmuutujad

- **Süntaks** (induktiivselt)

Atomaarne valem e. aatom on kujul L , kus L on 0-kohaline predikaatsümbol e.lausemuutuja või kujul $P(t_1, \dots, t_n)$ (või $P t_1 \dots t_n$), kus P on n -kohaline predikaatsümbol ja $t_1 \dots t_n$ on indiviidterminid.

1. *Atomaarne valem* on valem
2. Kui p on valem, siis $\neg p$ on valem.
3. Kui p ja q on valemid, siis $p \wedge q, p \vee q, p \Rightarrow q, p \equiv q$ on valemid.

4. Kui p on valem ja v on indiviidmuutuja, siis $\forall v p$ ja $\exists v p$ on valemid.

5. Muid valemiteid PA-s ei ole

Muutuja on valemis seotud, kui **kõik** tema **esinemised** selles valemis on seotud.

Vastasel juhul on muutuja valemis vaba.

Valem on *kinnine (closed)*, kui kõik tema muutujad on seotud ja vastasel juhul on *valem vaba*.

Näide: x on valemis $A \wedge x \wedge \forall x A x x$ vaba ning see valem on lahtine.

Lauseks nimetatakse predikaatarvutuse valemite, milles ei ole vabu muutujaid:

Näide: $\exists x (A x \wedge \forall y A y y)$

- **Semantika esitus *a'la* Tarski**

! PA lause tõesuse kontrollimiseks on vaja vaadata läbi kõik tema tähendused.

!! Tähendused sõltuvad ka seotud muutujate väärtustustest →

Selleks tõeväärtuse tabelid ei sobi, vaja ***kompaktsemat esitust*** tõeväärtuse arvutamiseks.

PA signatuur sisaldab antud arvutuse kõiki predikaat- ja konstantsümboleid.

PA loogika sümbolid – loogikatehte sümbolid ja indiviidmuutujad.

Olgu *Const* – PA indiviidkonstantide sümbolite loend ja *Pred* predikaatsümbolite loend, siis signatuur σ on nende loendite *Const* ja *Pred* paar:

$$\sigma = \langle Const ; Pred \rangle$$

Näide:

Olgu $Const = \langle j, m \rangle$, kus (*j* – Juku, *m* – Mari)

$Pred = \langle N \rangle$ (*N* – “_ on naine”)

siis

signatuur e. tähistuste hulk: $\sigma = \langle \{j, m\}; \{N\} \rangle$

Universum U – kõigi objektide hulk, mida PA termid võivad tähistada
PA interpretatsiooniks I nimetatakse loendit, mis koosneb *universumist* e. *interpretatsiooni*
kandjast (so hulgast U_I , $U_I \neq \emptyset$) ja *PA signatuuri* σ kõigi elementide interpretatsioonidest
universumis U_I .

$$I = \langle U_I; Const_I; Pred_I \rangle, \text{ kus}$$

- $Const_I$ on saadud loendist $Const$ iga konstantsümboli c asendamisel universumi U_I mingi elemendiga c_I .
- $Pred_I$ on saadud loendist $Pred$ iga predikaatsümboli P asendamisel tema ekstensiooni e. tõehulgaga P_I universumis U_I .

Näide (järg):

Olgu universum $H = \{\text{Juku, Mari}\}$, siis PA signatuuriga σ interpretatsioon

$$I = \langle H; \{j_I, m_I\}; \{N_I\} \rangle, \text{ kus}$$

$$j_I = \text{Juku}$$

$$m_I = \text{Mari}$$

$$N_I = \{\text{Mari}\} \subseteq H \quad \% \text{ predikaat „on naissoost“}$$

Ülesanne 1: Defineerige PA (süntaks ja semantika), milles on 2 ühekohalist ja 1 kahekohaline predikaat ning universum koosneb viiest objektist.

- **Lause** on PA valem, milles puuduvad vabad muutujad st. tema interpretatsioon antud universumis on tõene või väär!

Tähistusi:

$I \models p$ - valem p on interpretatsioonis I tõene

Valemite hulga L *mudeliks* nimetame interpretatsiooni I , milles kõik L laused on tõesed:

$$I \models p \quad (p \in L)$$

Näide (järg):

Interpretatsioon I on lause N mudel.

Märkus:

Olgu $p(x/c)$ valem, mis on saadud valemist p mutuja x kõigi vabade esinemiste asendamisel sümboliga c . Kui x on valemi p ainus vaba mutuja ja c universumi mingile elemendile vastav konstantsümbol, siis on $p(x/c)$ predikaatarvutuse kinnine valem e. lause.

Definitsioon (PA semantika). Olgu antud interpretatsioon I , mille universum on U_I .

1. Kinnine atomaarne valem $P t_1 \dots t_n$ on interpretatsioonis I tõene parajasti siis, kui konstantide korteež (t_{1I}, \dots, t_{nI}) kuulub predikaadi P ekstensiooni:

$$I \models P t_1 \dots t_n \Leftrightarrow (t_{1I}, \dots, t_{nI}) \in P_I.$$

2. $I \models \neg p \Leftrightarrow I \not\models p$

3. $I \models p \wedge q \Leftrightarrow I \models p$ ja $I \models q$

$$I \models p \vee q \Leftrightarrow I \models p \text{ või } I \models q$$

$$I \models p \Rightarrow q \Leftrightarrow I \not\models p \text{ või } I \models q$$

$$I \models p \equiv q \Leftrightarrow I \models p \text{ ja } I \models q \text{ või } I \not\models p \text{ ja } I \not\models q$$

4. $I \models \forall x p \Leftrightarrow$ iga $c \in U_I$ korral $I \models p\{x/c\}$

5. $I \models \exists x p \Leftrightarrow$ leidub $c \in U_I$, nii et $I \models p\{x/c\}$

Valem p on PA-s *loogiliselt tõene*, kui ta on tõene igas interpretatsioonis: $\models p$

Valem p on PA-s *loogiliselt väär*, kui ta on väär igas interpretatsioonis: $\models \neg p$

Kõik ülejäänud valemid on *kontingentsed*.

Kehtestatavad valemid on loogiliselt tõesed ja kontingentsed.

Lause: $\models p \iff$ iga interpretatsiooni I korral kehtib $I \models p$

Mitte segamini ajada loogilise järelduvuse mõistega!!!

➤ **Valemite hulgast Γ järeldub loogiliselt valem p , kui iga Γ mudel on ka p mudel.**

$$\Gamma \vdash p$$

PA-s formaliseerimise mustreid:

□ Loogiline ruut

Uurime ühe kvantoriga (ja filtreerimispredikaadiga) lausete omadusi:

- Üldjaatav lause (A - väljendab omaduse olemasolu kõigil antud liiki objektidel):

Näide: ”*Kõik inimesed naeratavad*”

$$\forall x(I x \Rightarrow N x)$$

- Üldeitav lause (E):

Näide: ”*Ükski inimene ei naerata*”

$$\forall x(I x \Rightarrow \neg N x)$$

- Osajaatav lause (I - omadus esineb ainult osadel antud liiki objektidel):

Näide: ”*Mõni inimene naeratab*”

$$\exists x(I x \wedge N x)$$

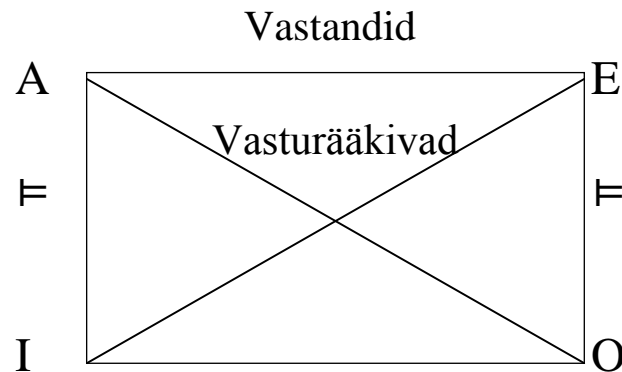
- Osaeitav lause (O):

Näide: ”*Mõni inimene ei naerata*”

$$\exists x(I x \wedge \neg N x)$$

- *Vastandid* - laused, mis ei saa olla korraga tõesed
- *Vasturääkivus e. kontradiktsioon* – laused, mille tõeväärtused on alati erinevad

Lause: Valemid p ja q on *vastandid* parajasti siis, kui $p \equiv \neg q$ ja $q \equiv \neg p$.
Valemid p ja q on *vasturääkivad* parajasti siis, kui $p \equiv \neg q$



$$\begin{aligned} A &= \neg O \\ O &= \neg A \\ I &= \neg E \\ E &= \neg I \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &\equiv I \\ E &\equiv O \end{aligned}$$

□ Süllogismid

- Süllogism on kahe eeldusega kehtivad arutlused.
- Eeldustes on 3 mõistet, kusjuures üks esineb mõlemas eelduses

Süllogismi figuurid:

Kõik kassid on hallid

$$\forall x (K x \Rightarrow H x)$$

Mõni koduloom on kass

$$\exists x (L x \wedge K x)$$

Mõni koduloom on hall

$$\exists x (L x \wedge H x)$$

□ Kvantorite korduv kasutamine

Samanimeliste kvantorite järjekorra vahetamine on lubatud:

Keegi armastab kedagi: $\exists x \exists y A x y$

Kedagi armastatakse: $\exists y \exists x A x y$

$$\exists x \exists y A x y = \exists y \exists x A x y$$

$$\forall x \forall y p = \forall y \forall x p$$

➤ Erinevat tüüpi kvantorite kohti ei saa vabalt vahetada!!!

$E xy$ – "x ema on y"

$\forall x \exists y E xy \neq \exists y \forall x E xy$ % Igal inimesel leidub ema

$\exists y \forall x p \neq \forall x \exists y p$